

POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS DALAM ALJABAR  
MAKS-PLUS



oleh  
MARYATUN  
M0112053

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan  
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS SEBELAS MARET  
SURAKARTA  
2017

POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS DALAM ALJABAR

MAKS-PLUS

SKRIPSI

MARYATUN

NIM. M0112053

dibimbing oleh

Pembimbing I

Drs. Siswanto, M.Si.  
NIP. 19670813 199203 1 002

Pembimbing II

Drs. Santoso Budi Wiyono, M.Si.  
NIP. 19620203 199103 1 001

telah dipertahankan di hadapan Dewan Penguji  
dan dinyatakan memenuhi syarat  
pada hari Kamis, 09 Maret 2017

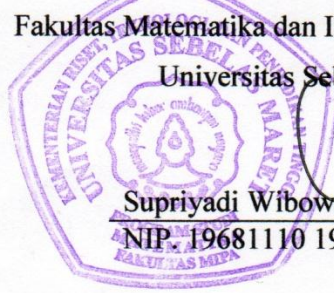
Dewan Penguji

Jabatan	Nama dan NIP	Tanda Tangan	Tanggal
Ketua	Drs. Pangadi, M.Si. NIP. 19571012 199103 1 001	 .....	23 Maret 2017 .....
Sekretaris	Titin Sri Martini, S.Si., M.Kom. NIP. 19750120 200812 2 001	 .....	23 Maret 2017 .....
Anggota	Drs. Siswanto, M.Si. NIP. 19670813 199203 1 002	 .....	24 Maret 2017 .....
Penguji	Drs. Santoso Budi Wiyono, M.Si. NIP. 19620203 199103 1 001	 .....	23 Maret 2017 .....

Disahkan

di Surakarta pada tanggal **24 MAR 2017**

Kepala Program Studi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Sebelas Maret



Supriyadi Wibowo, S.Si., M.Si.  
NIP. 19681110 199512 1 001

## ABSTRAK

Maryatun, 2017. POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS DALAM ALJABAR MAKS-PLUS. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Aljabar maks-plus ( $\mathbb{R}_{maks}$ ) merupakan himpunan bilangan real dan  $\varepsilon = -\infty$  yang dinotasikan dengan  $\mathbb{R}_\varepsilon$ . Operasi pada aljabar maks-plus ada dua yaitu memaksimumkan ( $\oplus$ ) dan menjumlahkan ( $\otimes$ ). Polinomial dalam aljabar maks-plus dapat dinotasikan sebagai  $p(z) = \oplus_{r=0}^m c_r \otimes z^{j_r}$  dengan  $c_r, j_r \in \mathbb{R}$ . Bilangan  $j_r$  disebut *degree* (derajat) dari  $p(z)$  dan  $m + 1$  disebut *length*.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji ulang polinomial karakteristik dari suatu matriks, sudut terbesar (*the greatest corner*) dari polinomial karakteristik dan polinomial karakteristik dari matriks khusus dalam aljabar maks-plus. Selanjutnya diberikan contoh untuk polinomial karakteristik matriks, sudut terbesar dan matriks khusus.

Hasil penelitian ini, yaitu suatu polinomial karakteristik dari suatu matriks, sudut terbesar dari polinomial karakteristik dengan menggunakan nilai eigen, dan polinomial karakteristik dari matriks khusus, yaitu polinomial karakteristik dari matriks diagonal dominan dan matriks atas  $T = \{0, -\infty\}$ .

***Kata kunci*** : polinomial karakteristik, sudut terbesar, matriks khusus, matriks diagonal dominan, matriks atas  $T = \{0, -\infty\}$ .

## ABSTRACT

Maryatun, 2017. THE CHARACTERISTIC POLYNOMIAL OF MATRIX IN MAKS-PLUS ALGEBRA. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Max-plus algebra  $(\mathbb{R}_{max})$  is the set of real numbers and  $\varepsilon = -\infty$  which denoted by  $\mathbb{R}_\varepsilon$ . There are two items of max-plus algebra operation, those are maximizes ( $\oplus$ ) and summation ( $\otimes$ ). Polynomial in max-plus algebra can be denoted as  $p(z) = \oplus_{r=0}^m c_r \otimes z^{j_r}$  with  $c_r, j_r \in \mathbb{R}$ . The numbers  $j_r$  is called degree of  $p(z)$  and  $m + 1$  is called length.

This research aims are studying the characteristic polynomial in matrix, the greatest corner is discussed by the characteristic polynomial and the characteristic polynomial of a special matrix in max-plus algebra. Furthermore, it is given an example for characteristic polynomial, the greatest corner and a special matrix.

The results of this research showed that the characteristic polynomial in matrix, the greatest corner of the characteristic polynomial using eigenvalue and the characteristic polynomial of special matrix, there are the characteristic polynomial of the diagonal dominant matrix and matrix over  $T = \{0, -\infty\}$ .

**Key words:** *characteristic polynomial, the greatest corner, a special matrix, diagonal dominant matrix, matrix over  $T = \{0, -\infty\}$ .*

## **PERSEMBAHAN**

Tulisan ini kupersembahkan untuk Ibu, Bapak, dan sahabat yang selalu memberikan motivasi.

## **MOTO**

1. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (Q. S. Al Insiroh: 6).
2. Sesuatu yang belum dikerjakan sering kali tampak mustahil, kita baru yakin kalau kita telah berhasil melakukannya. (Evelyn Underhill)

## **KATA PENGANTAR**

Bismillahirrahmanirrahim,

Puji syukur kepada Alloh SWT yang senantiasa memberikan rahmat serta hidayahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Selain itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini, khususnya kepada

1. bapak Drs. Siswanto, M.Si. sebagai dosen pembimbing I dan bapak Drs. Santoso Budi Wiyono, M.Si. sebagai pembimbing II atas kesedian dan kesabaran yang diberikan dalam membimbing penulis,
2. sahabat-sahabatku yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini, dan
3. semua pihak yang memberikan bantuan dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebut satu per satu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukan.

Surakarta, Maret 2017

Penulis

## DAFTAR ISI

PENGESAHAN .....	ii
ABSTRAK .....	iii
<i>ABSTRACT</i> .....	iv
PERSEMBAHAN .....	v
MOTO .....	vi
KATA PENGANTAR .....	vii
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR GAMBAR .....	x
DAFTAR TABEL .....	xi
DAFTAR NOTASI .....	xii
<b>I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang Masalah .....	1
1.2. Perumusan Masalah .....	2
1.3. Tujuan .....	2
1.4. Manfaat .....	2
<b>II LANDASAN TEORI</b> .....	<b>3</b>
2.1 Tinjauan Pustaka .....	3
2.1.1 Aljabar maks-plus .....	4
2.1.2 Matriks dalam $\mathbb{R}_{maks}$ .....	4
2.1.3 Permutasi .....	5
2.1.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	7
2.1.5 Polinomial Maks-Plus .....	10
2.2 Kerangka Pemikiran .....	10
<b>III METODE PENELITIAN</b> .....	<b>11</b>
<b>IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	<b>12</b>
4.1 Polinomial Karakteristik Maks-Plus .....	12
4.2 Sudut Terbesar ( <i>The greatest corner</i> ) Polinomial Karakteristik .....	15
4.3 Bentuk Polinomial Karakteristik dari Matriks Khusus dalam Aljabar Maks-Plus .....	22



4.3.1 Matriks Diagonal Dominan .....	22
4.3.2 Matriks atas $T = \{0, -\infty\}$ .....	26
<b>V PENUTUP</b> .....	<b>28</b>
5.1 Kesimpulan .....	28
5.2 Saran .....	29
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>30</b>

## **DAFTAR GAMBAR**

1. Graf berbobot berarah untuk contoh 2.1.4 .....	8
2. Graf berbobot berarah untuk contoh 2.1.5 .....	9
3. Graf berbobot berarah untuk contoh 4.2.7 .....	19
4. Graf berbobot berarah untuk contoh 4.2.8 .....	20
5. Graf berbobot berarah untuk contoh 4.2.9 .....	21

## DAFTAR TABEL

1. <i>Cycle</i> dasar dari gambar 2.1.1 .....	8
2. <i>Cycle</i> dasar dari gambar 2.1.2 .....	9
3. <i>Cycle</i> dasar dari gambar 4.2.1 .....	20
4. <i>Cycle</i> dasar dari gambar 4.2.2 .....	21
5. <i>Cycle</i> dasar dari gambar 4.2.3 .....	22

## DAFTAR NOTASI

$\mathbb{R}$	:	himpunan bilangan real
$\mathbb{R}_{maks}$	:	aljabar maks-plus
$\overline{\mathbb{R}}$	:	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\mathbb{R}_{\varepsilon}$	:	$\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$
$\oplus$	:	operasi maksimum
$\otimes$	:	operasi penjumlahan
$\varepsilon$	:	$-\infty$
$\overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$	:	himpunan matriks aljabar maks-plus berukuran $m \times n$
$\mathbb{N}$	:	himpunan bilangan asli
$a_{ij}$	:	elemen dari matriks $A$
$A_{ij}$	:	matriks $A$ dengan elemen-elemen $\mathbb{R}_{max}$
$\lambda(A)$	:	nilai eigen matriks $A$
■	:	akhir pembuktian
$w(i, j)$	:	bobot path dari node $i$ ke $j$
$D_A$	:	graf bebobot berarah dari matriks $A$
$l(\sigma)$	:	panjang dari <i>cycle</i> $\sigma$ pada matriks $A$
$w(\sigma, A)$	:	bobot dari <i>cycle</i> $\sigma$ pada matriks $A$
$\mu(\sigma, A)$	:	bobot rata-rata <i>cycle</i> $\sigma$ pada matriks $A$
$\sigma$	:	<i>cycle</i>