NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM PELABELAN-γ PADA GRAF POHON PISANG $B_{n,k}$ DAN PERSAHABATAN D_3^m

oleh

ENTYKA MAYHASTI ROSYIDA

M0104028

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

SURAKARTA

2009

SKRIPSI

NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM PELABELAN-γ

PADA GRAF POHON PISANG $B_{n,k}$ DAN PERSAHABATAN D_3^m

yang disiapkan dan disusun oleh

ENTYKA MAYHASTI ROSYIDA

M0104028

dibimbing oleh

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Mania Roswitha, M. Si.	Dra. Yuliana Susanti, M. Si.
NIP. 19520628 198303 2 001	NIP. 19611219 198703 2 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Senin, tanggal 27 Juli 2009

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji	Tanda Tangan
1. Dra. Diari Indriati, M. Si.	1.
NIP. 19610112 198811 2 001	....
2. Drs. Tri Atmojo K, M. Sc., Ph. D.	2.
NIP. 19630826 198803 1 002	....
3. Irwan Susanto, DEA.	3.
NIP. 19710511 199512 1 001	....

Surakarta, 29 Juli 2009

Disahkan oleh

Fakutas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,	Ketua Jurusan Matematika,
Prof. Drs. Sutarno, M. Sc. Ph. D.	Drs. Kartiko, M.Si.
NIP. 19600809 198612 1 001	NIP. 19500715 198601 1 001

ABSTRAK

Entyka Mayhasti Rosyida, 2009. <u>NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM PELABELAN-γ PADA GRAF POHON PISANG</u> $B_{n,k}$ <u>DAN PERSAHABATAN</u> D_3^m. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Suatu pelabelan-γ graf G yang mempunyai *order* |V(G)| dan ukuran |E(G)| merupakan suatu fungsi satu-satu, $f : V(G) \to \{0, 1, ..., |E(G)|\}$, yang menurunkan pelabelan $f' : E(G) \to \{1, 2, ..., |E(G)|\}$ terhadap *edge-edge* G yang didefinisikan sebagai selisih dari label-label verteks pada kedua ujung *edge*, $f'(e) = |f(u) - f(v)|$, untuk setiap *edge* $e = uv$ dari G. Setiap pelabelan-γ graf G dengan *order* |V(G)| dan ukuran |E(G)|, menentukan suatu "nilai" yang dinotasikan dengan $val(f)$ dan didefinisikan dengan $val(f)=\Sigma_{e\in E(G)}f'(e)$. Nilai maksimum dan minimum dari pelabelan-γ graf G didefinisikan sebagai $val_{maks}(G) = maks\{val(f)\}$ dan $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$, dengan f adalah pelabelan-γ graf G. Suatu pelabelan-γ dari graf G disebut pelabelan maks-γ jika $val(f) = val_{maks}(G)$ dan pelabelan min-γ jika $val(f) = val_{min}(G)$.

Tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ dari graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan persahabatan D_3^m. Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. nilai maksimum dan minimum pada graf pohon pisang $B_{n,k}$,

$$val_{maks}(B_{n,k}) = 3k^2 - k - 2, \quad n = 2$$

dan

$$val_{\min}(B_{n,k}) = \begin{cases} n\binom{\frac{k}{2}+1}{2} + n\binom{\frac{k}{2}}{2} + k\left\lceil \dfrac{n^2-2n}{4} \right\rceil + n &, \quad k = genap \\ 2n\binom{\frac{k+1}{2}}{2} + k\left\lceil \dfrac{n^2-2n}{4} \right\rceil + n &, \quad k = ganjil, \end{cases}$$

2. nilai maksimum dan minimum pada graf persahabatan D_3^m ,

$$val_{maks}(D_3^m) = \binom{2m+1}{2} + m^2$$

dan

$$val_{\min}(D_3^m) = 2\binom{m+1}{2} + 2\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor.$$

Kata Kunci : pelabelan-γ, graf pohon pisang, graf persahabatan.

ABSTRACT

Entyka Mayhasti Rosyida, 2009. MAXIMUM AND MINIMUM VALUES OF γ-LABELINGS ON BANANA TREE $B_{n,k}$ AND FRIENDSHIP GRAPH D_3^m. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

A γ-labeling of a graph G of order $|V(G)|$ and size $|E(G)|$ is a one-to-one function, $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, ..., |E(G)|\}$ that induces a labeling $f' : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |E(G)|\}$ of the edge of G defined by the difference of labels on the both of vertices of edge, $f'(e) = |f(u) - f(v)|$, for each edge $e = uv$ of G. Each γ-labeling of graph G of order $|V(G)|$ and size $|E(G)|$, determined a value denoted by $val(f)$ and defined by $val(f)=\Sigma_{e\in E(G)}f'(e)$. The maximum and minimum values of a γ-labeling of a graph G are defined by $val_{max}(G) = max\{val(f)\}$ and $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$, where f is γ-labeling of graph G. A γ-labeling of graph G is γ-max labeling if $val(f) = val_{max}(G)$ and $_{\text{of graph } G \text{ is}}$ γ-min labeling if $val(f) = val_{min}(G)$.

The aims of the research are to determine maximum and minimum values of banana tree $B_{n,k}$ and friendship graph D_3^m. The method on this research is a literary study.

According to the discussion, it can be concluded that

1. *The maximum and the minimum values on banana tree graph $B_{n,k}$*

MOTO

Awal mula menuntut ilmu adalah diam,

kedua mendengarkan, ketiga paham dan hafal, dan keempat mengamalkannya

(Pepatah)

PERSEMBAHAN

Karya ini ku persembahkan untuk

- *Mama dan Papa tercinta*
- *Someone, thanks for all*
- *Sahabat-sahabatku*
- *All my family*

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan. Sholawat dan salam semoga selalu tercurah kepada suri tauladan Rosulullah Muhammad SAW, serta keluarga, sahabat, dan orang-orang yang istiqomah di jalan-Nya.

Di dalam penulisan skripsi ini, penulis tidak lepas dari segala kesulitan dan keterbatasan yang akhirnya dapat penulis atasi berkat bantuan dari beberapa pihak. Oleh Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada

1. Dra. Mania Roswitha, M. Si. dan Dra. Yuliana Susanti, M. Si., sebagai pembimbing I dan pembimbing II yang telah memberikan petunjuk dalam penyusunan skripsi ini,
2. Drs. Tri Atmojo K, M. Sc., Ph. D., sebagai Pembimbing Akademis yang telah memberikan bimbingan, masukan, dan dorongan semangat untuk terus maju,
3. seluruh staf dosen dan karyawan, khususnya di jurusan matematika dan umumnya di fakultas MIPA,
4. rekan-rekan Matematika angkatan 2004 FMIPA UNS, terimakasih atas kekeluargaan kita,
5. semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyusun skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas segala bantuan yang telah diberikan kepada penulis. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Surakarta, Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

G	: Suatu graf
$(V(G),E(G))$	: Graf G dengan himpunan verteks $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$
$V(G)$	: Himpunan verteks berhingga yang tidak kosong dari graf G
$E(G)$	: Himpunan *edge* dari pasangan berhingga yang tidak berurutan dari $V(G)$
$\nu(G)$	: Order / banyaknya verteks
$\varepsilon(G)$	: Ukuran / banyaknya *edge*
$G(\nu,\varepsilon)$	: Graf berorder ν dan ukuran ε
$e(v_i,v_j)$	: *edge e* antara v_i dan v_j
P_n	: *Path* berorder n
S_n	: Graf Star dengan n verteks
$B_{n,k}$	: Graf Pohon Pisang dengan n-*star* dan setiap *star* ada k-verteks
D_3^m	: Graf Persahabatan dengan m-*cycle* C_3
C_n	: Lingkaran dengan n verteks
K_n	: Graf lengkap dengan n verteks
$F_{2,n}$	: Graf firecracker dengan 2 graf star berorder n
$S_{m,n}$	: Graf double star berorder m dan n
$val(f_n)$	: Nilai pelabelan ke-n
val_{min}	: Nilai minimum pelabelan
val_{maks}	: Nilai maksimum pelabelan

BAB I
PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang banyak berperan dalam pengembangan matematika terapan dan telah mengalami perkembangan sejak tahun 1920-an. Penerapan teori graf sangat membantu menyelesaikan masalah dalam kehidupan nyata, banyaknya aplikasi dalam berbagai bidang antara lain ilmu komputer, riset operasi, komunikasi, dan ilmu pengetahuan alam. Dalam representasi dari graf, verteks menunjukkan *nodes* atau titik, sedangkan *edge* menunjukkan garis yang menghubungkan dua verteks. Menurut Wallis (2001), pelabelan suatu graf yang telah diperkenalkan Rosa (1967) adalah pemetaan yang membawa elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan bulat positif atau non-negatif.

Saat ini banyak permasalahan yang berkaitan dengan teori graf yang telah dikaji, terutama pelabelan. Salah satunya teori graf memberikan solusi dalam masalah penentuan nilai maksimum dan minimum dalam pelabelan-γ yang merupakan salah satu pokok bahasan mengenai pelabelan dalam teori graf. Chartrand *et al.* (2005), mendefinisikan pelabelan-γ dari graf G sebagai fungsi 1-1 $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., m\}$ yang menurunkan sebuah pelabelan $f' : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., m\}$ terhadap *edge-edge* pada G dan didefinisikan sebagai selisih dari label-label verteks pada kedua ujung *edge*, $f'(e) = |f(u) - f(v)|$, untuk setiap *edge* $e = uv$ dari G.

Setiap pelabelan-γ f dari graf G berorder n dan ukuran m menetapkan nilai yang dinotasikan dengan $val(f)$ dan didefinisikan dengan

$$val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e).$$

Karena f adalah fungsi 1-1 dari $V(G)$ ke $\{0, 1, 2, ..., m\}$, maka berlaku $f'(e) \geq 1$ untuk setiap *edge* e pada graf G dan $val(f) \geq m$.

Untuk graf G berorder n dan ukuran m, nilai maksimum dari pelabelan-γ graf G didefinisikan sebagai $val_{maks}(G) = maks\{val(f)\}$ dengan f adalah sebuah pelabelan-γ dari G, dan nilai minimum dari pelabelan-γ graf G didefinisikan sebagai $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$ dimana f adalah sebuah pelabelan-γ dari G. Sebuah pelabelan-γ g dari graf G adalah sebuah pelabelan maks-γ jika $val(g) = val_{maks}(G)$ dan pelabelan-γ h adalah sebuah pelabelan min-γ jika $val(h) = val_{min}(G)$.

Penelitian mengenai pelabelan-γ telah dilakukan oleh beberapa peneliti pada kelas graf lain, seperti Chartrand *et al.* (2005) pada lintasan, lingkaran, dan graf lengkap, Roswitha dan Indriati (2007) untuk graf *n-sun*, dan Indriati dkk. (2008) pada graf *firecracker* dan *double star*. Pada skripsi ini, penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian tersebut dengan mencari pelabelan-γ pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan D_3^m serta dicari pola pelabelan secara umum untuk menentukan val_{maks} dan val_{min} dari kelas graf yang belum pernah dibahas sebelumnya.

Selain graf tersebut belum diteliti, graf tersebut juga mempunyai karakter unik. Misalnya graf pohon pisang yaitu graf yang menyerupai pohon pisang, dimana pohon pisang bisa mempunyai beberapa batang pohon dalam satu akar. Sedangkan graf persahabatan juga menyerupai keterkaitan dengan persahabatan dalam dunia nyata, untuk orang pertama sebagai pusat graf mempunyai beberapa sahabat dimana sahabatnya masih punya hubungan sahabat dengan salah satu sahabat dari orang pertama.

1. 2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan di atas, maka masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah

1. bagaimana menentukan pelabelan-γ pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan D_3^m,
2. bagaimana menentukan nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ dari sebuah graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan D_3^m.

1. 3. Batasan Masalah

Permasalahan dalam penelitian ini dibatasi oleh beberapa hal

1. pelabelan pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ untuk $n \geq 2$ dan $k \geq 4$,
2. pelabelan pada graf D_3^m untuk $m \geq 2$**,**

1. 4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan pola pelabelan umum dan membangun teorema dari pelabelan-γ dengan mencari besarnya nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ dari graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan D_3^m**.**

1. 5. Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan akan bermanfaat bagi peneliti dan pembaca berkaitan dengan pelabelan-γ pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan D_3^m. Manfaat dari penelitian ini adalah

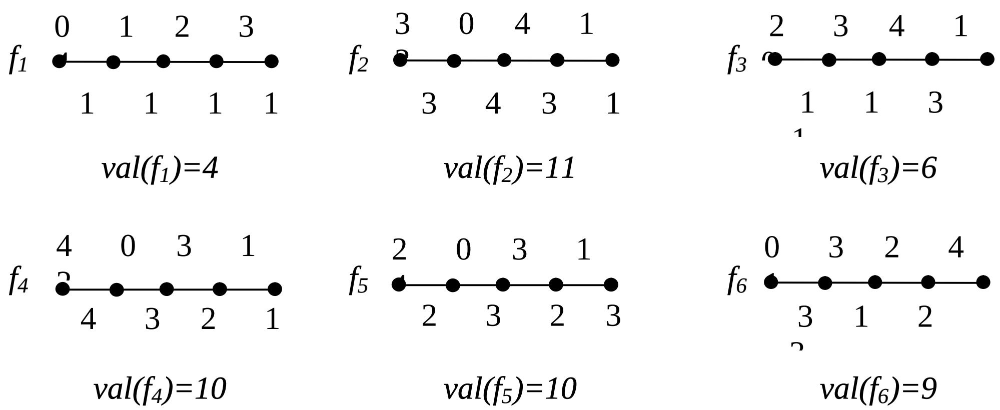
1. menambah wawasan tentang teori graf khususnya tentang pelabelan,
2. mengetahui pola umum nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ dari sebuah graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan D_3^m.

BAB II

LANDASAN TEORI

1. 6. Tinjauan Pustaka

Pelabelan menggunakan pelabelan-γ telah dilakukan oleh beberapa peneliti, dalam penelitian tersebut telah ditemukan pola pelabelan umum pada beberapa kelas graf. Penelitian yang dilakukan Chartrand *et al.* (2005), pada Gambar 2. 1 enam pelabelan-γ $f_1, f_2, ..., f_6$ dari *path* P_5, dimana label dari verteks ditunjukkan di atas setiap verteks dan label dari *edge* ditunjukkan di bawah setiap *edge*.



Gambar 2. 1. Beberapa pelabelan-γ dari *path* P_5

Dari penelitian tersebut ditemukan $val(f_1) = 4$ untuk pelabelan-γ f_1 dari P_5 dimana f_1 menunjukkan pelabelan min-γ dari P_5 dan $val(f_2) = 11$ untuk pelabelan-γ f_2 dari P_5 dan f_2 menunjukkan pelabelan maks-γ dari P_5.

Dalam penelitian Chartrand *et al.* (2005) tersebut, ditemukan juga pola pelabelan umum untuk lintasan (*path*), lingkaran (*cycle*), dan graf lengkap (*complete graph*). Nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ pada graf tersebut adalah

6.1. Lingkaran

Didapat pola umum lingkaran dengan $n \geq 3$

$$val_{maks}(C_n) = \frac{(n-1)(n+3)}{2}$$

$$val_{\min}(C_n) = 2(n-1).$$

6.2. Graf lengkap

$$val_{maks}(K_n) = \begin{cases} \dfrac{n(3n^3 - 5n^2 + 6n - 4)}{24}, & n \quad genap \\ \dfrac{(n^2-1)(3n^2 - 5n + 6)}{24}, & n \quad ganjil \end{cases}$$

$$val_{\min}(K_n) = \binom{n+1}{3}, \; n \geq 3.$$

6.3. Lintasan

Didapat pola umum lintasan dengan $n \geq 2$

$$val_{maks}(P_n) = \left\lfloor \frac{n^2 - 2}{2} \right\rfloor$$

$$val_{\min}(P_n) = n - 1.$$

Selain penelitian yang dilakukan oleh Chartrand *et al. (2005)*, Roswitha dan Indriati (2007) melakukan penelitian pada graf *n-sun* untuk sebarang *n*, besarnya nilai maksimum dan minimum dihitung dengan rumus

$$val_{maks}(G) = \frac{1}{2}(5n^2 + 2n), \; n = genap$$

$$val_{\min}(G) = 2(n-1) + n^2.$$

Indriati dkk. (2008) melakukan penelitian pada graf *firecracker* $F_{2,n}$ dan graf *double star* dengan hasil

a. graf *firecracker* $F_{2,n}$

$$val_{maks}(F_{2,n}) = \binom{2n}{n} + (n-1)^2$$

$$val_{\min}(F_{2,n}) = \binom{n}{2} + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil,$$

b. graf *double star*

$$val_{maks}(S_{m,n}) = \binom{m+n+2}{2} + (m)(n);\ m \leq n$$

$$val_{\min}(S_{m,n}) = \begin{cases} \dbinom{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor}{2} + \dbinom{\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil}{2} + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, & n = ganjil \\ \dbinom{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor}{2} + \dbinom{\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil}{2} + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil^2 + m, & n = genap. \end{cases}$$

1. 7. Landasan Teori

Bagian landasan teori memuat beberapa teori yang digunakan dalam penelitian ini, antara lain pengertian dasar graf dan pelabelan graf.

2. 2. 1. Pengertian Dasar Graf

Ada beberapa pengertian dasar graf yang sering dipakai dalam penulisan skripsi ini, ditunjukkan dengan definisi-definisi sebagai berikut

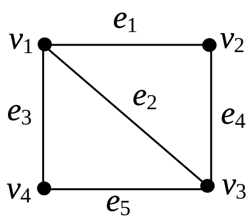
Definisi 2. 1 (Chartrand dan Lesniak, 1996)

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan (V(G),E(G)) dengan V(G) adalah himpunan verteks berhingga yang tidak kosong dan E(G) adalah himpunan berhingga dari pasangan berhingga tidak berurutan (tidak harus beda) anggota-anggota dari V(G), anggota dari E(G) disebut edge. Banyaknya verteks dalam suatu graf G disebut order dari G, dinotasikan dengan $\nu(G)$ *dan banyaknya edge dalam suatu graf G disebut ukuran dari G, dinotasikan dengan* $\varepsilon(G)$*. Suatu graf yang dinotasikan dengan* $G(\nu,\varepsilon)$ *mempunyai order* ν *dan ukuran* ε*.*

Definisi 2. 2 (Hartsfield dan Ringel, 1990)

Graf tak berarah (undirected graph) adalah graf yang edge-nya tidak mempunyai arah. Edge e yang terhubung dengan pasangan tak berurutan verteks v_i *dan* v_j *ditulis* $e(v_i,v_j)$ *atau* $e(v_j,v_i)$*.*

Gambar 2. 2 menunjukkan sebuah graf tidak berarah dengan himpunan titik V(G) dan himpunan *edge* E(G), yaitu V(G) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan E(G) = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ = $\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$. Dengan demikian, *order* graf G adalah $\nu(G) = 4$ dan ukuran graf G adalah $\varepsilon(G) = 5$.

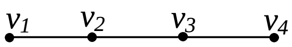


Gambar 2. 2 Graf G

Definisi 2. 3 (Gross and Yellen, 1999)

Lintasan merupakan sebuah pohon dimana dua verteksnya berdegree 1, sedangkan n-2 verteks yang lain berdegree 2.

Contoh lintasan ditunjukkan pada Gambar 2.3

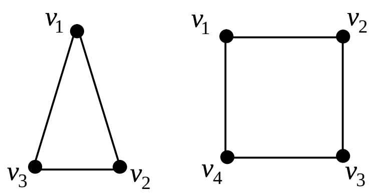


Gambar 2. 3 Litasan berorder 4

Definisi 2. 4 (Chartrand dan Oellermann, 1993)

Lingkaran merupakan lintasan yang panjangnya tidak sama dengan nol dan verteks awal sama dengan verteks akhir.

Contoh lingkaran ditunjukkan oleh Gambar 2.4

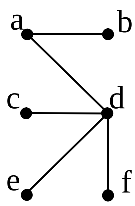


Gambar 2. 4 Lingkaran dengan n = 3 dan n = 4

Definisi 2. 5 (Munir, 2006)

Pohon (Tree) adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung lingkaran.

Contoh pohon berorder 6 ditunjukkan pada Gambar 2. 5

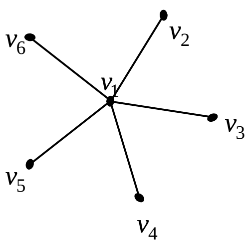


Gambar 2. 5 Pohon

Definisi 2. 6 (Harary, 1994; Pemmaraju dan Skiena, 2003; dan Tutte, 2005)

Graf star S_n atau dikenal dengan "n-star" adalah pohon pada n verteks dengan satu verteks mempunyai degree n-1 dan n-1 verteks yang lain mempunyai degree 1.

Contoh graf *star* S_n ditunjukkan pada Gambar 2. 6 dengan n = 6

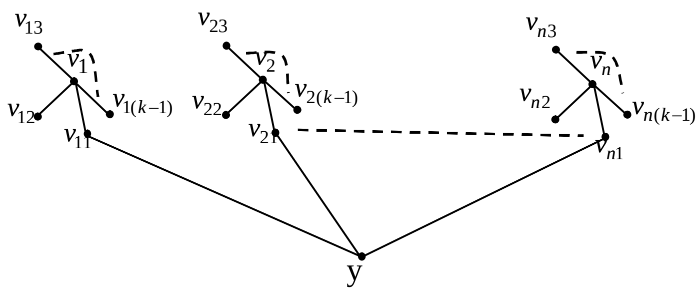


Gambar 2. 6 Graf *star* S_6

Definisi 2. 7 (Chen *et al.*, 1997)

Sebuah B(n,k) pohon pisang (Banana Tree) adalah sebuah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu daun dari setiap n-copies pada sebuah k graf star dengan satu verteks akar yang berbeda dari semua graf star.

Contoh graf pohon pisang $B_{n,k}$ ditunjukkan pada Gambar 2. 7

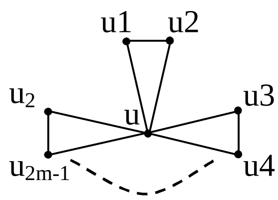


Gambar 2. 7 Graf pohon pisang $B_{n,k}$

Definisi 2. 8 (Gallian, 2007)

Graf kincir angin Belanda D_3^m, sering disebut juga graf persahabatan (Friendship), yaitu graf yang didapat dari gabungan graf lingkaran C_3 sebanyak m dengan satu verteks digunakan barsama.

Contoh graf persahabatan ditunjukkan Gambar 2.8



Gambar 2. 8 Graf persahabatan D_3^m

2. 2. 2. Pelabelan Graf

Menurut Wallis (2001), pelabelan suatu graf adalah pemetaan yang membawa elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan bulat positif atau non-negatif.

Definisi 2. 9 (Chartrand *et al.*, 2005)

Untuk sebuah graf yang berorder n dan berukuran m, pelabelan-γ graf G adalah sebuah fungsi 1-1, $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., m\}$ *yang menurunkan sebuah pelabelan* $f' : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., m\}$ *terhadap edge-edge G yang didefinisikan sebagai selisih dari label pada verteks-verteks pada kedua ujung edge,* $f'(e) = |f(u) - f(v)|$*, untuk setiap edge* $e = (u, v)$ *dari G.*

Definisi 2. 10 (Chartrand *et al.*, 2005)
Untuk sebuah graf yang berorder n dan berukuran m, ditentukan sebuah "nilai" yang dinotasikan dengan val(f), yang didefinisikan sebagai $val(f)=\Sigma_{e\in E(G)}f'(e)$*. Dalam hal ini f adalah fungsi 1-1 dari* $V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., m\}$.

Definisi 2. 11 (Chartrand *et al.*, 2005)
Untuk sebuah graf G yang berorder n dan berukuran m ditentukan nilai maksimum dari sebuah pelabelan-γ dari graf G yang didefinisikan sebagai $val_{maks}(G) = maks\{val(f)\}$ *dimana f adalah pelabelan-γ graf G. Sedangkan nilai minimum dari sebuah pelabelan-γ dari graf G didefinisikan sebagai* $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$ *dimana f adalah pelabelan-γ graf G.*

Definisi 2. 12 (Chartrand *et al.*, 2005)
Sebuah pelabelan-γ dari graf G disebut pelabelan maks-γ jika $val(f) = val_{maks}(G)$ *dan sebuah pelabelan-γ dari graf G disebut pelabelan min-γ jika* $val(f) = val_{min}(G)$.

1. 8. Kerangka Pemikiran

Berdasarkan landasan teori di atas, dapat disusun suatu kerangka pemikiran untuk menentukan nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan persahabatan D_3^m. Langkah pertama adalah memahami pengertian dasar tentang graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan persahabatan D_3^m serta memahami cara menggunakan pelabelan-γ. Langkah kedua adalah pemberian label pada setiap verteks dalam graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan persahabatan D_3^m sesuai dengan definisi pelabelan-γ graf G. Langkah berikutnya adalah menghitung f' serta menentukan pola pelabelan umum nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ untuk graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan persahabatan D_3^m. Langkah terakhir adalah membuktikan pola pelabelan umum nilai maksimum dan minimum yang telah didapat.

BAB III
METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan persahabatan D_3^m**.** Materi pendukung penelitian ini diambil dari referensi buku-buku yang sudah ada dan penulis mengembangkan dari materi tersebut. Definisi-definisi yang terdapat dalam buku-buku referensi dan jurnal-jurnal dikaji ulang, kemudian digunakan dalam pembahasan permasalahan yang telah dirumuskan.

Oleh karena itu, untuk mencapai tujuan penulisan diambil langkah-langkah sebagai berikut :

8.1.1.1. menyajikan konsep dan pengertian tentang pelabelan secara umum, khususnya pelabelan-γ,

8.1.1.2. menerapkan pelabelan-γ pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan persahabatan D_3^m**,**

8.1.1.3. menentukan pola pelabelan umum nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ,

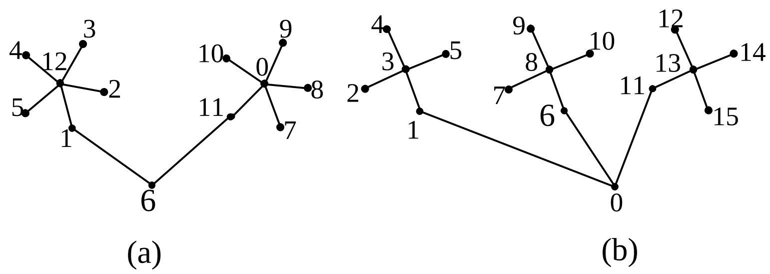
8.1.1.4. membuktikan pola pelabelan umum nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ yang telah didapatkan.

BAB IV
PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas mengenai pelabelan menggunakan pelabelan-γ pada pohon pisang $B_{n,k}$ dan persahabatan D_3^m sehingga diperoleh rumus umum nilai maksimum dan minimumnya, disertai dengan pembuktian setiap rumusan umum yang telah diperoleh tersebut.

4. 1. Pelabelan-γ pada Graf Pohon Pisang $B_{n,k}$

Graf pohon pisang $B_{n,k}$ merupakan graf yang dikontruksikan dari graf *star* dengan menghubungkan verteks *y* ke salah satu daun pada setiap graf *star*, dimana *y* bukan bagian dari graf *star*. Setiap verteks pada graf pohon pisang diberi label antara 0, 1, ..., *nk*. Contoh pelabelan pada graf pohon pisang ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Graf pohon pisang berlabel

Gambar 4.1 (a) menunjukkan contoh pelabelan pada graf pohon pisang $B_{2,6}$ dengan nilai 100 dan Gambar 4.1 (b) merupakan contoh pelabelan pada graf pohon pisang $B_{3,5}$ dengan nilai 36.

Teorema 4. 1 *Untuk semua bilangan bulat* $k \geq 4$ *dan* $n = 2$

$$val_{maks}(B_{2,k}) = 3k^2 - k - 2 .$$

Bukti :

Graf pohon pisang $B_{2,k}$ memiliki 2 buah graf ***star***, misalkan pusat untuk graf ***star*** adalah v dan u, dimana $u_1, u_2, ..., u_{k-1}$ adalah verteks yang ***adjacent*** dengan u dan $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ adalah verteks yang ***adjacent*** dengan v, sedangkan akarnya adalah y.

Jika f adalah pelabelan-γ dari graf pohon pisang $B_{2,k}$, maka graf pohon pisang $B_{2,k}$ mempunyai pelabelan maks-γ jika pusat u diberi label terkecil, pusat v diberi label terbesar, sedangkan untuk akarnya y diberi label tengah. Didefinisikan pelabelan maks-γ pada $B_{2,k}$ sebagai berikut

$$f(u) = 0, \; f(v) = 2k, \qquad \ldots (4.1)$$

$$f(u_i) = 2k - i, \; i = 1, \; 2, \; ..., \; k-1, \qquad \ldots (4.2)$$

$$f(v_i) = i, \; i = 1, \; 2, \; ..., \; k-1, \qquad \ldots (4.3)$$

$$f(y) = k, \qquad \ldots (4.4)$$

Dari keempat persamaan di atas, yaitu Persamaan (4.1), (4.2), (4.3), dan (4.4) serta mengacu pada Definisi 2.9 dan Definisi 2.10 maka diperoleh val_{maks} dari graf pohon pisang $B_{n,k}$ adalah

$$\begin{aligned} val_{maks}(B_{2,k}) &= val(f(uu_i)) + val(f(yu_1)) + val(f(v_1y)) + val(f(vv_i)) \\ &= ((2k-1) - 0 + (2k-2) - 0 + ... + (2k-(k-1)) - 0) + ((2k-1) - k) \\ &\quad + (k-1) + ((2k-1) + (2k-2) + ... + (2k-(k-1))) \\ &= ((2k-1) + (2k-2) + ... + (2k-(k-1)) + (k-1) + (k-1) \\ &\quad + ((2k-1) + (2k-2) + ... + (2k-(k-1))) \\ &= 2(2k + 2k + ... + 2k) - 2(1 + 2 + ... + (k-1)) + 2(k-1) \\ &= 2(k-1)(2k) - 2k\left(\tfrac{k-1}{2}\right) + 2(k-1) \\ &= 4k^2 - 4k - k^2 + k + 2k - 2 \\ &= 3k^2 - k - 2. \end{aligned}$$

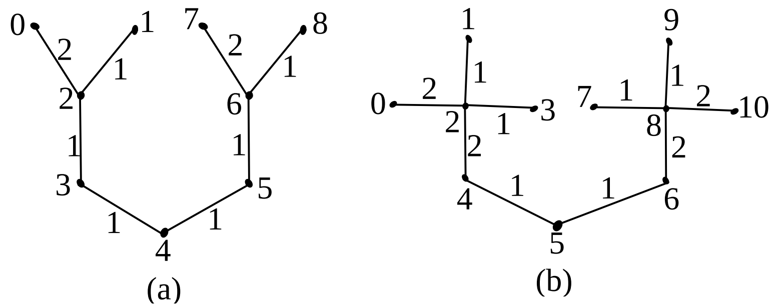
Teorema terbukti. ■

Contoh pelabelan maksimum untuk graf pohon pisang ditunjukkan pada Gambar 4.1 (a).

Teorema 4. 2 *Untuk semua bilangan bulat* $k \geq 4$ *dan* $n \geq 2$ *,*

$$val_{\min}(B_{n,k}) = \begin{cases} n\binom{\frac{k}{2}+1}{2} + n\binom{\frac{k}{2}}{2} + k\left\lceil \frac{n^2-2n}{4} \right\rceil + n & , \quad k = genap \\ 2n\binom{\frac{k+1}{2}}{2} + k\left\lceil \frac{n^2-2n}{4} \right\rceil + n & , \quad k = ganjil. \end{cases}$$

Bukti :



Gambar 4.2 Pelabelan minimum pada graf pohon pisang

Gambar 4.2 (a) menunjukkan pelabelan minimum graf pohon pisang $B_{2,4}$ untuk k genap dengan nilai 10, sedangkan Gambar 4.2 (b) untuk k ganjil, pelabelan minimum pada graf pohon pisang $B_{2,5}$ dengan nilai 14.

Graf pohon pisang $B_{n,k}$ memiliki sebanyak n graf *star,* misalkan pusat pada graf star adalah v_a, dengan $a = 1, 2, ..., n$, dimana $v_{a1}, v_{a2}, ..., v_{a(k-1)}$ adalah verteks yang *adjacent* dengan v_a, sedangkan akarnya adalah y.

Jika f adalah pelabelan-γ dari graf pohon pisang $B_{n,k}$, maka graf pohon pisang $B_{n,k}$ mempunyai pelabelan min-γ untuk k genap didefinisikan sebagai berikut

$$f(v_a) = \frac{(2a-1)k}{2}, \quad 1 \leq a \leq n, \qquad \dots (4.5)$$

untuk $a \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$f(v_{ai}) = \begin{cases} (a-1)k + i - 1, & 1 \le i \le \dfrac{k}{2} \\ (a-1)k + i, & \dfrac{k}{2} + 1 \le i \le k-1, \end{cases} \qquad \text{… (4.6)}$$

sedangkan $a > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$f(v_{ai}) = \begin{cases} (a-1)k + i, & 1 \le i < \dfrac{k}{2} \\ (a-1)k + i + 1, & \dfrac{k}{2} \le i \le k-1, \end{cases} \qquad \text{... (4.7)}$$

maka

$$val(f) = \sum_{a=1}^{n} \sum_{i=1}^{k/2} \left| f(v_a) - f(v_{ai}) \right| + \sum_{a=1}^{n} \sum_{i=(k/2)+1}^{k-1} \left| f(v_a) - f(v_{ai}) \right|$$

$$= n \sum_{i=1}^{k/2} i + n \sum_{i=1}^{(k/2)-1} i$$

$$= n\,(1+2+...+k/2) + n\,(1+2+...+((k/2)-1))$$

$$= n \begin{pmatrix} \frac{k}{2}+1 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \text{… (4.8)}$$

Sedangkan untuk *k* ganjil, pelabelannya adalah

$$f(v_a) = \begin{cases} \dfrac{(2a-1)k-1}{2}, & a \le \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \\ \dfrac{(2a-1)k+1}{2}, & \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor < a \le n, \end{cases} \qquad \text{… (4.9)}$$

Untuk $a \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$f(v_{ai}) = \begin{cases} (a-1)k + i - 1, & 1 \le i \le \dfrac{k-1}{2} \\ (a-1)k + i, & \dfrac{k+1}{2} \le i \le k-1, \end{cases} \qquad \text{... (4.10)}$$

dan $a > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$f(v_{ai}) = \begin{cases} (a-1)k + i, & 1 \le i \le \dfrac{k-1}{2} \\ (a-1)k + i + 1, & \dfrac{k+1}{2} \le i \le k-1. \end{cases} \qquad \text{… (4.11)}$$

Oleh karena itu,

$$val(f) = \sum_{a=1}^{n/2} \left(\sum_{i=1}^{(k-1)/2} \left| f(v_a) - f(v_{ai}) \right| + \sum_{i=(k+1)/2}^{k-1} \left| f(v_a) - f(v_{ai}) \right| \right)$$
$$+ \sum_{a=n/2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{(k-1)/2} \left| f(v_a) - f(v_{ai}) \right| + \sum_{i=(k+1)/2}^{k-1} \left| f(v_a) - f(v_{ai}) \right| \right)$$
$$= \frac{n}{2} \left(\sum_{i=1}^{(k-1)/2} i + \sum_{i=1}^{(k-1)/2} i \right) + \frac{n}{2} \left(\sum_{i=1}^{(k-1)/2} i + \sum_{i=1}^{(k-1)/2} i \right)$$
$$= 2n \left(\sum_{i=1}^{(k-1)/2} i \right)$$
$$= 2n\ (1 + 2 + ... + (k-1)/2)$$
$$= 2n \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{2} \right). \qquad \text{… (4.12)}$$

Jika verteks *star* yang *adjacent* dengan akar *y* adalah v_c dengan $c = 1, 2, ..., n$, maka untuk *n* genap didefinisikan sebagai berikut

$$f(v_c) = \begin{cases} ck - 1, & 1 \le c \le \dfrac{n}{2} \\ (c-1)k + 1, & \dfrac{n}{2} + 1 \le c \le n, \end{cases} \qquad \text{… (4.13)}$$

$$f(y) = \frac{nk}{2}, \qquad \text{… (4.14)}$$

jadi

$$
\begin{aligned}
val(f) &= \sum_{c=1}^{n} \left| f(y) - f(v_c) \right| \\
&= \sum_{c=1}^{n/2} \left| f(y) - f(v_c) \right| + \sum_{c=(n/2)+1}^{n} \left| f(v_c) - f(y) \right| \\
&= \left| \frac{n}{2} f(y) - \sum_{c=1}^{n/2} f(v_c) \right| + \left| \left(\sum_{c=(n/2)+1}^{n} f(v_c) \right) - \frac{n}{2} f(y) \right| \\
&= \left| \frac{n}{2}\frac{nk}{2} - \sum_{c=1}^{n/2} ck - 1 \right| + \left| \left(\sum_{c=(n/2)+1}^{n} (c-1)k + 1 \right) - \frac{n}{2}\frac{nk}{2} \right| \\
&= \left| \frac{n^2k}{4} - \sum_{c=1}^{n/2} ck + \sum_{c=1}^{n/2} 1 \right| + \left| \left(\sum_{c=(n/2)+1}^{n} (c-1)k + \sum_{c=(n/2)+1}^{n} 1 \right) - \frac{n}{2}\frac{nk}{2} \right| \\
&= \left| \frac{n^2k}{4} - \left(k + 2k + \ldots + \frac{nk}{2} \right) + \frac{n}{2} \right| + \left| \left(\left(\frac{nk}{2} + \left(\frac{nk}{2} + 1 \right) + \ldots + (n-1)k \right) + \frac{n}{2} \right) - \frac{n^2k}{4} \right| \\
&= \left| \frac{n^2k}{4} - \frac{n}{4}\left(k + \frac{nk}{2} \right) \right| + \left| \left(\frac{n}{4}\left(\frac{nk}{2} + (n-1)k \right) \right) - \frac{n^2k}{4} \right| + n \\
&= \left| \frac{n^2k}{8} - \frac{nk}{4} \right| + \left| -\frac{nk}{4} - \frac{n^2k}{8} \right| + n \\
&= \frac{n^2k}{4} - \frac{2nk}{4} + n \\
&= \frac{\left(n^2 - 2n \right)k}{4} + n. \qquad \ldots (4.15)
\end{aligned}
$$

Sedangkan untuk n ganjil, didefinisikan sebagai berikut

$$
f(v_c) = \begin{cases} ck - 1, & 1 \le c \le \dfrac{n-1}{2} \\ (c-1)k + 1, & \dfrac{n+1}{2} \le c \le n, \end{cases} \qquad \ldots (4.16)
$$

$$
f(y) = \frac{(n-1)k}{2}, \qquad \ldots (4.17)
$$

kemudian diperoleh

$$
\begin{aligned}
val(f) &= \sum_{c=1}^{n} \left| f(y) - f(v_c) \right| = \sum_{c=1}^{(n-1)/2} \left| f(y) - f(v_c) \right| + \sum_{c=(n+1)/2}^{n} \left| f(v_c) - f(y) \right| \\
&= \left| \frac{n-1}{2} f(y) - \sum_{c=1}^{(n-1)/2} f(v_c) \right| + \left| \left(\sum_{c=(n+1)/2}^{n} f(v_c) \right) - \frac{n+1}{2} f(y) \right| \\
&= \left| \frac{n-1}{2} \frac{(n-1)k}{2} - \sum_{c=1}^{(n-1)/2} ck - 1 \right| + \left| \left(\sum_{c=(n+1)/2}^{n} (c-1)k + 1 \right) - \frac{n+1}{2} \frac{(n-1)k}{2} \right| \\
&= \left| \frac{(n-1)^2 k}{4} - \sum_{c=1}^{(n-1)/2} ck + \sum_{c=1}^{(n-1)/2} 1 \right| + \left| \left(\sum_{c=(n+1)/2}^{n} (c-1)k + \sum_{c=(n+1)/2}^{n} 1 \right) - \frac{n+1}{2} \frac{(n-1)k}{2} \right| \\
&= \left| \frac{(n-1)^2 k}{4} - \left(k + 2k + ... + \frac{(n-1)k}{2} \right) + \frac{n-1}{2} \right| \\
&\quad + \left| \left(\left(\frac{(n-1)k}{2} + \left(\frac{(n-1)k}{2} + 1 \right) + ... + (n-1)k \right) + \frac{n+1}{2} \right) - \frac{(n+1)(n-1)k}{4} \right| \\
&= \left| \frac{(n-1)^2 k}{4} - \frac{n-1}{4} \left(k + \frac{(n-1)k}{2} \right) \right| + \left| \left(\frac{n+1}{4} \left(\frac{(n-1)k}{2} + (n-1)k \right) \right) - \frac{(n+1)(n-1)k}{4} \right| + n \\
&= \left| \frac{(n-1)^2 k}{8} - \frac{(n-1)k}{4} \right| + \left| \frac{(n^2-1)k}{8} \right| + n \\
&= \frac{(n-1)^2 k}{8} - \frac{(2n-2-n^2+1)k}{8} + n \\
&= \frac{\left(n^2 - 2n + 1\right)k}{4} + n. \qquad \text{… (4.18)}
\end{aligned}
$$

Dari Persamaan (4.15) dan (4.18) untuk sebarang n diperoleh

$$val(f) = k \left\lceil \frac{n^2 - 2n}{4} \right\rceil + n. \qquad \text{… (4.19)}$$

Untuk k genap, menggunakan (4.8) dan (4.19), diperoleh

$$val_{\min}(B_{n,k}) = n \binom{\frac{k}{2}+1}{2} + n \binom{\frac{k}{2}}{2} + k \left\lceil \frac{n^2-2n}{4} \right\rceil + n,$$

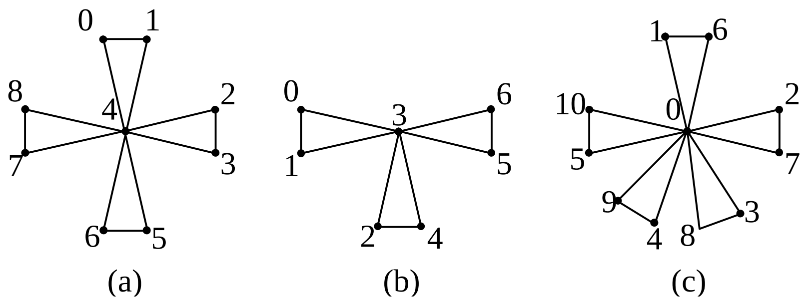
sedangkan untuk k ganjil, menggunakan (4.12) dan (4.19) diperoleh

$$val_{\min}(B_{n,k}) = 2n \binom{\frac{k+1}{2}}{2} + k \left\lceil \frac{n^2 - 2n}{4} \right\rceil + n.$$

Jadi teorema terbukti. ■

4. 2. Pelabelan-γ pada Graf Persahabatan D_3^m

Graf persahabatan merupakan graf yang dikonstruksikan dari lingkaran yang panjangnya sama. Pelabelan dilakukan dengan memperhatikan label tiap verteks harus berbeda, contoh pelabelannya pada Gambar 4.3



Gambar 4.3 Pelabelan pada graf persahabatan

Pelabelan graf persahabatan dibatasi pada lingkaran C_3 dengan m ≥ 2, pada Gambar 4.3 (a) merupakan pelabelan graf persahabatan D_3^4 dengan jumlah nilainya 24, sedangkan Gambar 4.3 (b) menunjukkan palabelan graf persahabatan D_3^3 dengan nilai 16, dan Gambar 4.3 (c) adalah pelabelan pada graf persahabatan D_3^5 yang bernilai 80.

Teorema 4. 3 *Untuk semua bilangan bulat* $m \geq 2$

$$val_{maks}(D_3^m) = \binom{2m+1}{2} + m^2.$$

Bukti :

Suatu graf persahabatan D_3^m mempunyai graf lingkaran sebanyak *m* dimana setiap graf lingkaran berorder 3. Misalkan pusat-nya adalah *u* dan verteks yang *adjacent* dengan *u* adalah u_i, dimana $i = 1, 2, ..., 2m$.

Jika *f* adalah pelabelan-γ dari graf persahabatan D_3^m maka graf persahabatan mempunyai pelabelan maks-γ. Jika pusatnya *u* diberi label 0, didefinisikan pelabelan maks-γ pada D_3^m adalah sebagai berikut

$$f(u) = 0, \qquad \dots (4.20)$$

$$f(u_i) = \begin{cases} l, & l = 1,\ 2,\ \dots,\ m, & i = ganjil \\ n, & n = m+1,\ m+2,\ \dots,\ 2m, & i = genap, \end{cases} \qquad \dots (4.21)$$

Mengacu pada Definisi 2.9 dan Definisi 2.10, maka dengan persamaan (4.20) dan (4.21) diperoleh val_{maks} graf persahabatan D_3^m sebagai berikut

$$\begin{aligned} val_{maks}(D_3^m) &= val(f(uu_i)) + val(f(u_{i=genap}u_{i=ganjil})) \\ &= (1-0+2-0+\dots+m-0)+(m+1-0+m+2-0+\dots+2m-0) \\ &\quad +(m+1-1+m+2-2+\dots+2m-m) \\ &= (1+2+\dots+m)+((m+1)+(m+2)+\dots+2m)+(m+m+\dots+m) \\ &= (1+2+\dots+m+(m+1)+(m+2)+\dots+2m)+m.m \\ &= \binom{2m+1}{2}+m^2\,. \end{aligned}$$

Terbukti. ■

Contoh pelabelan maksimum pada graf persahabatan ditunjukkan pada Gambar 4.3 (c).

Teorema 4. 4 *Untuk semua bilangan bulat* $m \geq 2$

$$val_{\min}(D_3^m) = 2\binom{m+1}{2} + 2\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor.$$

Bukti :

Suatu graf persahabatan D_3^m mempunyai graf lingkaran sebanyak m dan setiap graf lingkaran terdiri dari 3 verteks. Misalkan pusat-nya adalah u dan verteks yang *adjacent* dengan u adalah u_i dengan $i = 1, 2, \dots, 2m$.

Jika f adalah pelabelan-γ dari graf persahabatan D_3^m maka graf persahabatan mempunyai pelabelan min-γ. Jika pusatnya u diberi label tengah. Pelabelan min-γ pada D_3^m dapat adalah sebagai berikut

$$f(u) = m\,, \qquad \dots (4.22)$$

$$f(u_i) = \begin{cases} l-1, & l = 1,\ 2,\ \dots,\ m \\ n, & n = m+1,\ m+2,\ \dots, 2m, \end{cases} \qquad \dots (4.23)$$

Pada persamaan (4.22) dan (4.23) yang mengacu pada Definisi 2.9 dan Definisi 2.10, untuk *m* genap maka diperoleh val_{min} graf persahabatan D_3^m adalah

$$\begin{aligned} val_{\min}(D_3^m) &= val(f(uu_i)) + val(f(u_i u_{i-1})) \\ &= (m-0+m-1+\dots+m-(m-1)) + (m+1-m+m+2-m+\dots+2m-m) \\ &\quad + (1-0+3-2+\dots+(m-2)-(m-3)) + (m+1-m) + (m+3-(m+2) \\ &\quad + m+5-(m+4)+\dots+2m-(2m-1)) \\ &= (m+(m-1)+\dots+1) + (1+2+\dots+m) + (1+1+\dots+1) + (1+1+\dots+1) \\ &= 2(1+2+\dots+m) + (1+1+\dots+1) \\ &= 2\binom{m+1}{2} + m. \qquad \dots (4.24) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk *m* ganjil

$$\begin{aligned} val_{\min}(D_3^m) &= val(f(uu_i)) + val(f(u_{l-1}u_l)) + val(f(u_{l=m}u_{n=m+1})) + val(f(u_n u_{n-1})) \\ &= (m-0+m-1+\dots+m-(m-1)) + (m+1-m+m+2-m+\dots+2m-m) \\ &\quad + (1-0+3-2+\dots+(m-2)-(m-3)) + (m+1-(m-1)) \\ &\quad + ((m+3)-(m+2)+\dots+2m-(2m-1)) \\ &= (m+(m-1)+\dots+1) + (1+2+\dots+m) + (1+1+\dots+1) + (2+1+\dots+1) \\ &= 2(1+2+\dots+m) + (1+1+\dots+1) \\ &= 2\binom{m+1}{2} + m + 1. \qquad \dots (4.25) \end{aligned}$$

Dari dua pembuktian (4.24) dan (4.25) di atas didapat,

$$val_{\min}(D_3^m) = 2\binom{m+1}{2} + 2\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor.$$

Teorema terbukti. ■

Contoh untuk pelabelan minimum graf persahabatan dapat dilihat pada Gambar 4.3 (a) untuk *m* ganjil, sedangkan 4.3 (b) untuk *m* genap.

BAB V
PENUTUP

5. 1. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan, maka dapat disimpulkan

1. nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dengan $k \geq 4$ adalah

$$val_{maks}(B_{2,k}) = 3k^2 - k - 2,\ n = 2$$

dan

$$val_{\min}(B_{n,k}) = \begin{cases} n\binom{\frac{k}{2}+1}{2} + n\binom{\frac{k}{2}}{2} + k\left\lceil \frac{n^2-2n}{4} \right\rceil + n & , \quad k = genap \\ 2n\binom{\frac{k}{2}+1}{2} + k\left\lceil \frac{n^2-2n}{4} \right\rceil + n & , \quad k = ganjil. \end{cases}$$

2. nilai maksimum dan minimum pelabelan-γ pada graf persahabatan D_3^m adalah

$$val_{maks}(D_3^m) = \binom{2m+1}{2} + m^2$$

dan

$$val_{\min}(D_3^m) = 2\binom{m+1}{2} + 2\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor.$$

5. 2. Saran

Penelitian mengenai pelabelan-γ masih dapat dikembangkan lagi. Oleh karena itu, bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat mengembangkan pelabelan-γ untuk graf pohon pisang untuk nilai maksimum pada sebarang *n*, atau kelas-kelas graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G.; Erwin, D.; VanderJagt, D. W.; and Zhang, P. (2005). *γ-labeling of Graphs*. Western Michigan University

Chartrand, G. and Lesniak, L. (1996). *Graphs and Digraphs,* 3rd edition. Chapman and Hall, London.

Chartrand, G. and Oellermann, O. R. (1993). *Applied and Algorithmic Graphs Theory*. McGraw-Hill International, London.

Chen, W. C.; Lü, H. I.; and Yeh, Y. N. (1997). "*Operations of Interlaced Trees and Graceful Trees*" Southeast Asian Bull. Math.

Gallian, J. A. (2007). "Dynamic Survey DS6: Graph Labeling." *Electronic J. Combinatorics*, DS6, 1-58.

Gross, J. T. and Yellen, J. (1999). *Graphs Theory and Its Application.* Boca Raton, FL : CRC Press.

Harary, F. (1994). *Graph Theory.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Hartsfield, N and G. Ringel,. (1990). *Pearls in graph Theory : A Comprehensive Introduction*. Academic Press, Inc., San Diego.

Indriati, D.; M. Roswitha,; and I. Slamet,. (2008). *Aplikasi γ-labeling pada Graf Forest dan Firecracker sebagai Alternative Model Distribusi Minyak Goreng*. Penelitian DIPA 2008, FMIPA UNS.

Munir, R. (2006). *Diktat Kuliah IF2153 Matematika Diskrit*. Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.

Pemmaraju, S. and S. Skiena,. (2003). "Cycles, Stars, and Wheels." *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in Mathematica.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Rosa, A. (1967). On certain valuations of the vertices of a graph, in *Theory of Graphs*. Gordon and Breach, New York.

Roswitha, M. and D. Indriati,. (2007). *γ-labeling pada Graf n-sun*. Penelitian DIPA 2007, FMIPA UNS.

Tutte, W. T. (2005). *Graph Theory.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Wallis, W.D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser. Boston.