

**ANALISIS GERAK HARMONIK SEDERHANA UNTUK KASUS
BEBAN DAN PEGAS PADA POSISI HORIZONTAL DENGAN
SPREADSHEET EXCEL**

Oleh : Ahmad Fauzi

Staf Pengajar Program Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sebelas Maret
Jln. Ir. Sutami No. 36 A Kientingan Surakarta

Abstrak

Gerak harmonik sederhana merupakan satu topik penting dalam Fisika dan ilmu teknik. Pemahaman tentang gerak harmonik sederhana menjadi suatu kebutuhan bukan saja untuk ilmuwan akan tetapi juga kalangan insinyur. Hal ini terjadi karena bagi ilmuwan gerak harmonik sederhana merupakan dasar-dasar memahami berbagai gejala fisika yang lebih kompleks seperti redaman sedangkan bagi insinyur pemahaman tentang gerak harmonik sederhana penting sekali sebagai dasar perancangan berbagai aplikasi gerak harmonik sederhana seperti dalam pegas shock absorber mobil. Karakteristik gerak harmonik sederhana biasanya dinyatakan dalam persamaan differensial yang secara umum diselesaikan menurut analisis analitik. Namun demikian tidak semua persoalan gerak harmonik sederhana dapat diselesaikan dengan pendekatan analitik. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah ini adalah dengan menggunakan analisis numerik. Pada analisis gerak harmonik sederhana dengan pendekatan numerik dengan menggunakan metode Euler-Cromer untuk beban dan pegas pada posisi horizontal disimpulkan bahwa hasil yang diperoleh dengan analisis numerik hampirnya hampir sama dengan hasil analisis analitiknya.

Kata kunci: *gerak harmonik sederhana, pegas, Euler-Cromer*

1. Pendahuluan

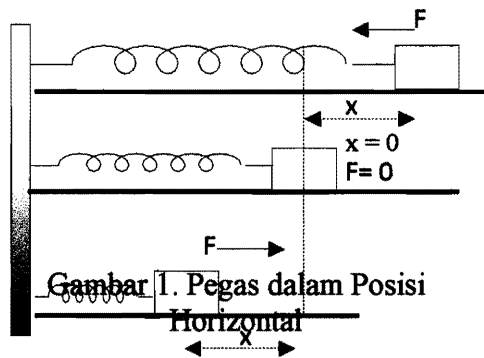
Gerak harmonik sederhana merupakan satu topik penting dalam Fisika. Pemahaman tentang gerak harmonik sederhana menjadi suatu kebutuhan bukan saja untuk ilmuwan akan tetapi juga kalangan insinyur. Hal ini terjadi karena bagi ilmuwan gerak harmonik sederhana merupakan dasar-dasar

memahami berbagai gejala fisika yang lebih kompleks seperti redaman sedangkan bagi insinyur pemahaman tentang gerak harmonik sederhana penting sekali sebagai dasar perancangan berbagai aplikasi gerak harmonik sederhana seperti dalam pegas *shock absorber* mobil. Karakteristik gerak harmonik sederhana biasanya dinyatakan dalam

persamaan differensial yang secara umum diselesaikan menurut analisis analitik namun demikian pada banyak kasus (gerak yang tidak harmonik) ditemui banyak kesulitan untuk menentukan solusi menurut pendekatan analitik, pada keadaan demikian pemecahan dengan pendekatan analisis numerik dapat dipergunakan untuk mempelajari karakteristik sistemnya.

2. Analisis Gerak Harmonik Sederhana dengan Pendekatan Analitik untuk Beban dan Pegas pada Posisi Horizontal

Gerak harmonik sederhana merupakan salah satu contoh gerak osilasi yang sangat penting dalam fisika. Sebagai contoh gerak harmonis sederhana adalah sebuah beban bermassa m yang diikatkan pada pegas ideal dengan konstanta pegas k dimana beban tersebut bebas bergerak di atas permukaan horizontal tanpa gesekan.



Sesuai hukum Hooke, jika beban digeser ke kanan, maka gaya yang dilakukan oleh pegas mengarah ke kiri. Jika beban bergeser ke arah kiri, maka

gaya yang akan dilakukan oleh pegas mengarah ke kanan dengan persamaan $F = -kx$. Pada keadaan ini, gaya yang dilakukan pegas disebut sebagai gaya pemulih dan gerak beban yang berisolasi ini adalah gerak harmonik sederhana. Untuk menganalisis gerakan ini, maka dipergunakan hukum kedua Newton yaitu

$$F = m a = -kx \quad \dots(1)$$

dengan mengingat bahwa $\frac{d^2x}{dt^2} = a$ maka persamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \dots(2)$$

atau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \dots(3)$$

solusi umum persamaan (3) adalah

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad \dots(4)$$

apabila $\phi = \delta + \frac{\pi}{2}$ maka persamaan (4) dapat dituliskan sebagai

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \quad \dots(5)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta) \quad \dots(6)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) \quad \dots(7)$$

dimana $\omega = \sqrt{k/m}$

berdasarkan definisi bahwa $\omega = \frac{2\pi}{T}$ maka periode gerak harmonik

sederhana dapat dinyatakan dengan persamaan

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \dots(8)$$

dengan mengingat definisi $f = \frac{1}{T}$ maka frekuensi osilasinya dapat dinyatakan dengan

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots(9)$$

dengan:

- ϕ = fase awal
- A = amplitudo maksimum (m)
- δ = tetapan
- m = masa beban (kg)
- k = konstanta pegas (N/m)

berdasarkan persamaan (4) sampai (7) dapat disimpulkan bahwa gerak harmoniknya dapat digambarkan sebagai fungsi gelombang sinusoidal terhadap waktu selamanya tanpa mengalami peluruhan dengan asumsi bahwa gesekan dapat diabaikan. Kecepatan sudut osilasi (ω) merupakan fungsi panjang tali dan k tetapi tidak tergantung pada m dan amplitudo geraknya.

3. Analisis Gerak Harmonik Sederhana dengan Pendekatan Numerik untuk Beban dan Pegas dengan Posisi Horizontal

Berdasarkan definisi bahwa percepatan merupakan turunan kecepatan terhadap waktu ($\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$)

maka persamaan (2) dapat disusun kembali menjadi

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} x \quad \dots(10)$$

dengan mempergunakan teori Euler maka

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = -\frac{k}{m} x$$

sehingga

$$\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = -\frac{k}{m} x \quad \dots(11)$$

atau

$$v(t + \Delta t) = v(t) - \frac{k}{m} x(t) \Delta t$$

secara umum persamaan (11) dapat dituliskan sebagai

$$v_{i+1} = v_i - \frac{k}{m} x_i \Delta t \quad \dots(12)$$

dengan cara yang sama berdasarkan definisi bahwa kecepatan merupakan turunan posisi terhadap waktu

$$\frac{dx}{dt} = v$$

apabila persamaan di atas di uraikan dengan teori Euler akan diperoleh

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \Delta t$$

secara umum persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t \quad \dots(13)$$

dengan:

- v = kecepatan linear (m/s)
- k = konstanta pegas (N/m)
- Δt = selang waktu (*Increment*)
- v_i = kecepatan linear pada $t = t$
- v_{i+1} = kecepatan linear pada $t = t + \Delta t$
- x_i = posisi beban pada $t = t$
- x_{i+1} = posisi beban pada $t = t + \Delta t$

Contoh

Suatu sistem terdiri dari pegas dengan tetapan 9 N/m dengan beban seberat 2 kg mula-mula dalam keadaan diam kemudian beban ditarik sepanjang 3 cm dalam arah horizontal kemudian dilepaskan. Analisislah gerakannya dengan menggunakan *Spreadsheet* melalui pendekatan analisis analitik dan analisis numerik (catatan bahwa $g = 9,8$ dan $\Delta t = 0,1$).

Penyelesaian

Sebagai langkah awal untuk menyelesaikan soal di atas adalah dengan mendeklarasikan variabel-variabel persamaan gerakanya seperti dalam tabel berikut.

Tabel 1. Variabel-Variabel dalam Persamaan Gerak Harmonik

Variabel	Nilai	Satuan
m	2	kg
A	0.03	m
k	9	N/m
t_0	0	s
Δt	0.1	s
ω	2.12132	rad/s

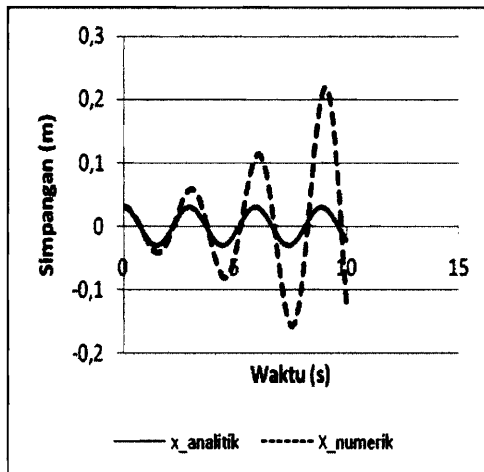
Langkah selanjutnya adalah mengadakan komputasi dengan menggunakan *Spreadsheet* sehingga akan diperoleh nilai-nilai posisi, kecepatan dan percepatan seperti tabel berikut.

Tabel 2. Perbandingan Nilai x , v dan a untuk Ayunan Sederhana dengan Pendekatan Analitik dan Numerik

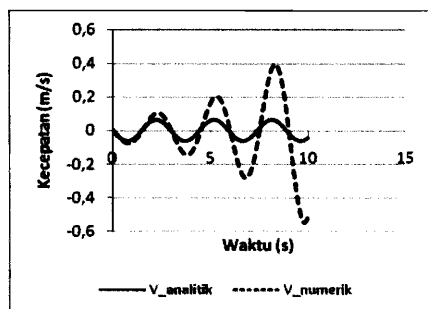
t	x_analitik	V_analitik	a_analitik	X_numerik	V_numerik	a_Numerik
0	0.03	0	-0.135	0.03	0	-0.135
0.1	0.029328	-0.013399	-0.131974	0.03	-0.0135	-0.135
0.2	0.02734	-0.026197	-0.123031	0.02865	-0.027	-0.128925
0.3	0.024127	-0.037821	-0.108573	0.02595	-0.0398925	-0.11677
0.4	0.019833	-0.047749	-0.089247	0.02196075	-0.05157	-0.098823
0.5	0.014649	-0.055537	-0.06592	0.01680375	0.06145234	-0.0756168
0.6	0.008808	-0.060835	-0.039638	0.010658516	0.06901403	-0.0479633
0.7	0.002573	-0.063405	-0.011578	0.003757114	0.07381036	-0.0169070
0.8	-0.00378	-0.063133	0.0169998	-0.00362392	0.07550106	0.01630765
0.9	-0.00996	-0.060031	0.044816	-0.01117403	0.07387029	0.05028313
1	-0.01569	-0.054237	0.0706231	-0.01856106	-	0.08352476

					0.06884198	
1.1	-0.02073	-0.046012	0.093264	-0.02544526	0.06048951	0.11450365
1.2	-0.02483	-0.035724	0.1117237	-0.03149421	0.04903914	0.14172393
1.3	-0.02782	-0.023834	0.1251747	-0.03639812	0.03486675	0.16379154
1.4	-0.02956	-0.010876	0.1330139	-0.03988479	0.01848759	0.17948158
...

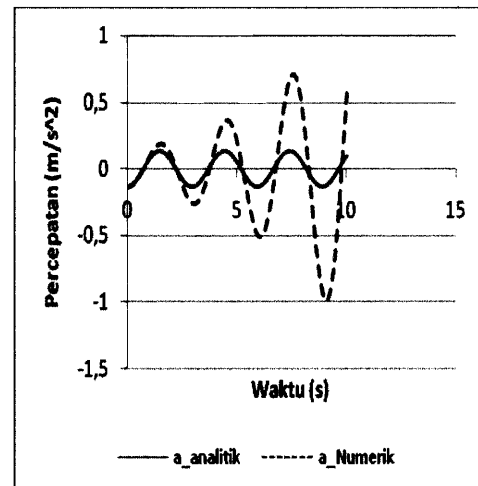
Langkah selanjutnya adalah membuat grafik hubungan simpangan, kecepatan dan percepatan terhadap waktu seperti tabel berikut.



Grafik 1 Hubungan Antara Posisi dan Waktu untuk Gerak Harmonik Sederhana dengan Pendekatan Analitik dan Numerik



Grafik 2 Hubungan Antara Kecepatan dan Waktu untuk Gerak Harmonik Sederhana dengan Pendekatan Analitik dan Numerik



Grafik 3. Hubungan Antara Percepatan dan Waktu untuk Gerak Harmonik Sederhana dengan Pendekatan Analitik dan Numerik

Berdasarkan grafik (1) dapat disimpulkan bahwa seiring dengan bertambahnya waktu untuk grafik hubungan sudut terhadap waktu dengan pendekatan numerik semakin tidak konvergen, demikian pula untuk grafik kecepatan dan percepatan terhadap waktu. Apabila dicermati lebih dalam berdasarkan tabel 2 diperoleh data bahwa pada t

= 0,1 s posisi beban menurut analisis analitik adalah 0.029328 m sedangkan menurut analisis numerik posisi beban adalah 0.03 m dengan demikian perhitungan dengan analisis numerik menyebabkan kesalahan 2,3% sedangkan untuk kecepatan perhitungan numerik sebesar 0,75% dan untuk percepatan juga menyebabkan kesalahan 2,3%. Untuk $t = 10$ s posisi beban menurut analisis analitik adalah -0.02137 m sedangkan posisi beban menurut analisis numerik adalah -0.12585 m dengan demikian perhitungan dengan analisis numerik menyebabkan kesalahan 488,9% sedangkan perhitungan kecepatan dengan analisis numerik menyebabkan kesalahan 1039.82% demikian pula untuk perhitungan percepatan dengan analisis numerik ternyata menimbulkan kesalahan 488,9%.

Menurut analisis analitik periode gerak harmonik adalah selalu 2,96 s sedangkan menurut analisis numerik periodenya 2,6 s kemudian 0,9 s, 1,9 s dan 4,3 s. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa perhitungan periode gerak harmonik sederhana dengan metode Euler tidak dapat diterima karena periode ayunan selalu berubah-ubah semakin lama semakin besar sedangkan menurut analisis analitik periodenya selalu tetap.

Berdasarkan hasil-hasil tersebut maka disimpulkan bahwa perhitungan kasus gerak harmonik sederhana dengan metode Euler

tidak dapat dipakai sehingga dibutuhkan metode numerik yang lain. Salah satu metode numerik yang akan dipakai pada kesempatan ini adalah metode Euler-Cromer dimana metode ini merupakan metode perbaikan dari metode Euler. Berdasarkan metode Euler-Cromer, maka kecepatan dan posisi beban dapat dinyatakan dengan persamaan

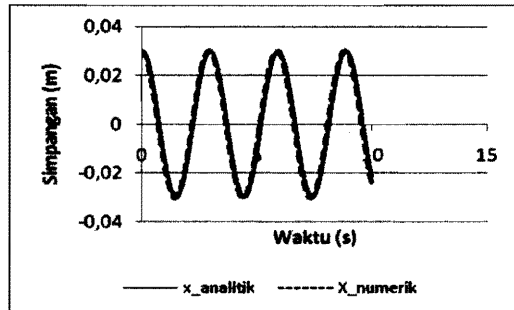
$$v_{i+1} = v_i - \frac{b}{m} x_i \Delta t \quad \dots(14)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{i+1} \Delta t \quad \dots(15)$$

dengan membandingkan persamaan (12) sampai (13) dan persamaan (14) sampai (15) disimpulkan bahwa apabila menggunakan metode Euler nilai v dan x sebelumnya dipakai untuk menghitung nilai v dan x yang baru sedangkan dengan metode Euler-Cromer nilai v dan x sebelumnya dipakai untuk menghitung nilai v yang baru akan tetapi nilai v yang baru dipergunakan untuk menghitung nilai x yang baru. Dengan demikian apabila soal di atas dikerjakan dengan metode Euler-Cromer akan diperoleh hasil komputasi seperti dalam tabel berikut.

Tabel 3. Perbandingan Nilai θ , ω dan α untuk Gerak harmonik Sederhana dengan Pendekatan Analitik dan Numerik dengan metode Euler-Cromer

t	x_analitik	V_analitik	a_analitik	X_numerik	V_numerik	a_Numerik
0	0.03	0	-0.135	0.03	0	-0.135
0.1	0.029328	-0.0134	-0.131973	0.02865	-0.0135	-0.128925
0.2	0.02734	-0.0262	-0.123031	0.0260108	-0.0263925	-0.11704838
0.3	0.024127	-0.03782	-0.108572	0.022201	-0.03809734	-0.09990457
0.4	0.019833	-0.04775	-0.089246	0.0173922	-0.04808779	-0.07826507
0.5	0.014649	-0.05554	-0.06592	0.0118008	-0.0559143	-0.05310363
0.6	0.008808	-0.06083	-0.039637	0.0056783	-0.06122466	-0.02555253
0.7	0.002573	-0.06341	-0.011578	-0.0006997	-0.06377992	0.003148432
0.8	-0.00378	-0.06313	0.0169998	-0.0070462	-0.06346507	0.031707715
0.9	-0.00996	-0.06003	0.044816	-0.0130756	-0.0602943	0.058840152
1	-0.01569	-0.05424	0.0706231	-0.0185166	-0.05441029	0.083324781
1.1	-0.02073	-0.04601	0.093264	-0.0231244	-0.04607781	0.104059795
1.2	-0.02483	-0.03572	0.1117237	-0.0266916	-0.03567183	0.120112119
1.3	-0.02782	-0.02383	0.1251747	-0.0290576	-0.02366062	0.130759397
1.4	-0.02956	-0.01088	0.1330139	-0.0301161	-0.01058468	0.135522502
1.5	-0.02998	0.00257	0.1348899	-0.0298194	0.00296757	0.134187095
1.6	-0.02905	0.0159	0.1307186	-0.0281807	0.01638628	0.126813268
1.7	-0.02682	0.028518	0.120687	-0.025274	0.02906761	0.113732845
1.8	-0.02339	0.039857	0.1052448	-0.0212299	0.04044089	0.095534443
1.9	-0.01891	0.049409	0.0850843	-0.0162304	0.04999434	0.073036991
2	-0.01358	0.056746	0.0611094	-0.0105006	0.05729804	0.047252875
2.1	-0.00764	0.06154	0.0343948	-0.0042983	0.06202332	0.019342379
2.2	-0.00136	0.063574	0.0061383	0.0020974	0.06395756	-0.00943852
2.3	0.004976	0.062758	-0.022393	0.0083988	0.06301371	-0.03779469
2.4	0.011094	0.059129	-0.049921	0.0143222	0.05923424	-0.0644501
2.5	0.016714	0.052848	-0.075211	0.0196012	0.05278923	-0.08820525
2.6	0.021584	0.044199	-0.097128	0.023998	0.0439687	-0.10799117
2.7	0.025487	0.033568	-0.114692	0.027315	0.03316959	-0.12291749
2.8	0.028248	0.021432	-0.127114	0.0294028	0.02087784	-0.13231251
2.9	0.029742	0.008335	-0.133837	0.0301674	0.00764659	-0.13575348
3	0.029902	-0.00513	-0.134559	0.0295746	-0.00592876	-0.13308554
...



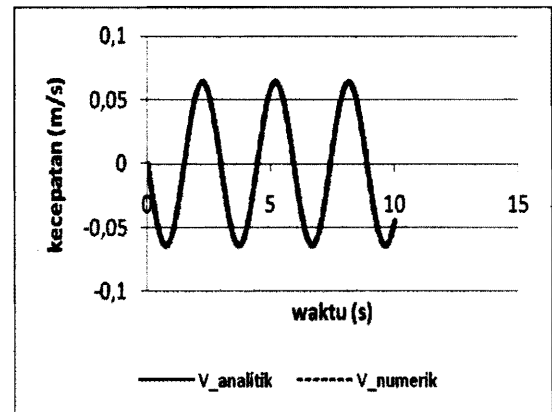
Grafik 4. Hubungan Antara Simpangan dan Waktu untuk Gerak Harmonik Sederhana dengan Pendekatan Analitik dan Numerik dengan Metode Euler-Cromer

Berdasarkan tabel 3 dan grafik 4 dapat disimpulkan bahwa pada pada $t = 0.1$ s posisi beban menurut analisis numerik adalah 0.02865 m sedangkan menurut analisis analitik posisi beban adalah 0.029328 m dengan demikian perhitungan dengan analisis numerik menyebabkan kesalahan 2.31%.

Pada $t = 10$ s posisi beban menurut analisis numerik adalah -0.024348 m sedangkan menurut analisis analitik posisi beban adalah -0.02137 m dengan demikian perhitungan dengan analisis numerik menyebabkan kesalahan 13,93%.

Menurut analisis analitik, periode gerak harmoniknya adalah selalu 2,96 s sedangkan menurut analisis numerik periodenya 2,9 s kemudian 3 s dan 2,9 s. Dengan demikian perhitungan dengan analisis numerik ini berturut-turut menimbulkan kesalahan 2,03%, 1,35% dan 2,03% sehingga dapat disimpulkan bahwa perhitungan periode gerak harmonik

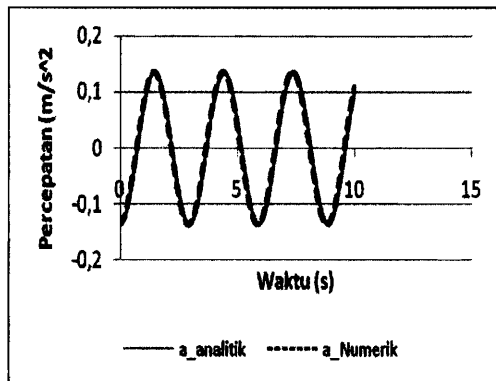
sederhana dengan metode Euler-Cromer dapat diterima karena periodenya hampir sama periode menurut analisis analitik.



Grafik 5. Hubungan Antara Kecepatan dan Waktu untuk Gerak Harmonik Sederhana dengan Pendekatan Analitik dan Numerik dengan Metode Euler-Cromer

Berdasarkan tabel 4 dan grafik 5 dapat disimpulkan bahwa pada pada $t = 0.1$ s posisi beban menurut analisis numerik adalah 0.02865 m sedangkan menurut analisis analitik posisi beban adalah 0.029328 m dengan demikian perhitungan dengan analisis numerik menyebabkan kesalahan 2.31% demikian pula dalam perhitungan kecepatan dan percepatannya analisis numerik menyebabkan kesalahan 0,75% dan 2,31%. Pada $t = 10$ s posisi beban menurut analisis numerik adalah -0.024348 m sedangkan menurut analisis analitik posisi beban adalah -0.02137 m dengan demikian perhitungan dengan analisis numerik menyebabkan kesalahan 13,93%

demikian pula dalam perhitungan kecepatan dan percepatannya analisis numerik menyebabkan kesalahan 3,59% dan 13,93%.



Grafik 6. Hubungan Antara Percepatan dan Waktu untuk Gerak Harmonik Sederhana dengan Pendekatan Analitik dan Numerik dengan Metode Euler-Cromer

Menurut analisis analitik periode gerak harmoniknya adalah selalu 2,96 s sedangkan menurut analisis numerik periodenya 2,9 s kemudian 3 s dan 2,9 s. Dengan demikian perhitungan dengan analisis numerik ini berturut-turut menimbulkan kesalahan 2,03%, 1,35% dan 2,03% sehingga dapat disimpulkan bahwa perhitungan periode gerak harmonik sederhana dengan metode Euler-Cromer dapat diterima karena periodenya hampir sama periode menurut analisis analitik.

Kesimpulan

Banyak persamaan fisika dinyatakan dengan persamaan differensial. Solusi persamaan differensial ini tidak dapat selalu ditentukan dengan

analisis analitik. Metode numerik dengan alat bantu *Spreadsheet Excel* merupakan salah satu cara yang dapat mengatasi masalah ini. Namun demikian dalam penggunaan metode numerik harus disesuaikan dengan karakteristik soal yang akan dipecahkan. Sebagai contoh, dalam analisis gerak harmonik sederhana untuk beban dan pegas dengan posisi horizontal analisis numerik dengan metode Euler tidak dapat dipakai karena kesalahannya sangat besar. Penggunaan metode Euler-Cromer terbukti mampu meningkatkan ketelitian perhitungan analisis numerik ini sehingga hasilnya sama dengan hasil dengan analisis analitik.

DAFTAR PUSTAKA

- Bloch, S.C. 2005. *Excel untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Terjemahan Soni Astranto. Jakarta: Erlangga.
- Chapra, S. dan Canale, R. 1998. *Numerical Methods for Engineers with Programming and Software Application*. Singapura: McGraw-Hill.
- Chapra, S. dan Canale, R. 1991. *Metode Numerik*. Terjemahan Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Fauzi, A. 2009. *Pengembangan Bahan Ajar Fisika dengan Aplikasi Spreadsheet*. Thesis: Universitas Negeri Semarang.

Giordano, N, 1997. *Computational Physics*. New Jersey: Prentice Hall.

Halliday, D dan Resnick, R. 1997. *FISIKA JILID 1*. Terjemahan Pantur Silaban dan Erwin Sucipto. Jakarta: Erlangga.

Hardyanto,W. 2005. *Mengungkap Fenomena Fisika dengan DELPHI*. Semarang: UNNES Press.

Karris, S. 2007. *Numerikal Analysis Using MATLAB and Excel*.: Orchard Publications.

Plybon, B. 1992. *Appllied Numerikal Analysis*.USA: PWS-KENT.

Tipler, P. 1998. *Fisika Untuk Sains dan Teknik*. Jakarta: Erlangga.

Young dan Freedman.2004. *University Physics*. San Francisco: Pearson Addison Wesley.